

מבחן במודלים חישוביים

סמסטר ב' התשס"ט, מועד א'

תאריך: 12.7.2009

מרצים: ד"ר מירי פרייזלר, פרופ' בני שור

מתרגלים: יהונתן ברנט, רני הוד

מומלץ לקרוא את כל ההנחיות והשאלות בתחילת המבחן, לפני תחילת כתיבת התשובות.

- משך הבחינה שעתיים ו-45 דקות.
- חומר עזר מותר: שני דפי A4, כתובים משני הצדדים.
- בראש כל עמוד בטופס המבחן יש למלא מספר ת"ז ומספר מחברת; בטופס התשובות יש למלא מספר ת"ז, מספר גירסא ומספר מחברת.
- במבחן שני חלקים. בחלק הראשון שתי שאלות פתוחות (30 נק' כל אחת) ובחלק השני 8 שאלות סגורות (5 נק' כל אחת). כדי לקבל ציון 100 בבחינה יש לענות נכונה על כל השאלות.
- תשובות לשאלות הסגורות יש לסמן במקום המתאים לכך בטופס התשובות. בכל שאלה יש לסמן תשובה יחידה.
- על התשובה לכל שאלה פתוחה להופיע במסגרת המתאימה בטופס המבחן (טופס זה). יש לענות תשובות ברורות ותמציתיות. תשובות מסורבלות או לא ניתנות פיזית לקריאה יזכו לניקוד חלקי בלבד.
- ודא' היטב את תשובתך לפני כתיבתה בטופס המבחן. בסוף הטופס מצורפת מסגרת לשימוש במקרי "חירום".
- מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד ולא תיבדק, אך יש להגישה עם המבחן.
- על סעיף של שאלה פתוחה ניתן לענות "אינני יודע/ת" כתשובה; על סעיף זה יינתנו 20% מהנקודות. במקרה זה אין להוסיף שום הסבר.
- מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בכיתה (בהרצאה, בתירגול או בתרגיל הבית) בתנאי שמצטטים אותה באופן מדויק. טענות שהוכחו במקום אחר (כגון: בספר הלימוד, בויקיפדיה, ב-MIT, בסמסטר קודם) יש להוכיח מחדש.
- אלא אם נאמר אחרת במפורש, כל המספרים המופיעים בשאלות הם שלמים, אי-שליליים ונתונים בייצוג בינארי.
- בשאלות בהן יש לתאר מכונת טיורינג ניתן להסתפק בתיאור מילולי משכנע של אופן פעולת המכונה. אין צורך להגדיר במדויק את פונקצית המעברים δ אלא אם השאלה מבקשת זאת במפורש.
- בכל השאלות ניתן להניח כי $P \neq \mathcal{NP}$ ו- $\mathcal{NP} \neq \text{co-}\mathcal{NP}$ אלא אם השאלה מציינת אחרת.

בהצלחה!

	ב1		א1
	ב2		א2

חלק I

שאלה 1

סעיף א' (15 נק')

נסמן את מחלקת השפות חסרות ההקשר ב- \mathcal{CFL} . עבור \mathcal{C} אוסף לא-טריוויאלי של שפות חסרות הקשר (קרי $\emptyset \subsetneq \mathcal{C} \subsetneq \mathcal{CFL}$) נסמן $L_{\mathcal{C}} = \{ \langle G \rangle : G \text{ is a context-free grammar and } L(G) \in \mathcal{C} \}$. הוכח/הוכיחי או הפרך/הפריכי (ע"י דוגמא נגדית מנומקת) את הטענה הבאה: לכל \mathcal{C} כזה, $L_{\mathcal{C}} \notin \mathcal{R}$.

הוכחה/דוגמא נגדית:

סעיף ב' (15 נק')

תהי $L = H_{TM} \cap \overline{A_{TM}}$. האם $L \in \mathcal{R}$? $L \in \mathcal{RE} \setminus \mathcal{R}$? $L \in \text{co-}\mathcal{RE} \setminus \mathcal{R}$? $L \notin \mathcal{RE} \cup \text{co-}\mathcal{RE}$?
 הוכח/הוכיחי.

תזכורת: H_{TM} היא בעית העצירה ו־ A_{TM} היא בעית הקבלה (לעיתים השתמשנו בסימון U_{TM} לציון שפה זו).

תשובה (יש להקיף בעיגול): \mathcal{R} / $\mathcal{RE} \setminus \mathcal{R}$ / $\text{co-}\mathcal{RE} \setminus \mathcal{R}$ / $\overline{\mathcal{RE} \cup \text{co-}\mathcal{RE}}$

הוכחה:

שאלה 2

סעיף א' (15 נק')

הוכח/הוכיחי כי הבעיה הבאה \mathcal{NP} -שלמה.

קלט: מספר טבעי $n \in \mathbb{N}$ ואוטומט סופי דטרמיניסטי A מעל הא"ב $\Sigma = \{1, 2, \dots, n\}$.

שאלה: האם יש מילה $w \in L(A)$ בה מופיעה כל אות של Σ בדיוק פעם אחת?

רמז: אפשר לעשות רדוקציה מבעית HAM-PATH.

הוכחה:

סעיף ב' (15 נק')

האם השפה הבאה ב- \mathcal{P} או שהיא \mathcal{NP} -שלמה? הוכח/הוכיחי.

אוסף כל הגרפים הפשוטים הלא-מכוונים $G = (V, E)$ המקיימים את התנאי הבא: קיימים שלושה מעגלים פשוטים, זרים בצמתים בזוגות, המכסים את כל צמתי הגרף.

תזכורת:

- גרף נקרא פשוט אם אין בו לולאות (קרי, קשת מצומת לעצמו) ו/או קשתות מקבילות (קרי, יותר מקשת אחת בין זוג צמתים שונים).
- מעגל נקרא פשוט אם הוא עובר בכל צומת שלו ובכל קשת שלו רק פעם אחת.
- אוסף מעגלים נקרא זר בצמתים בזוגות אם לאף זוג מעגלים מהאוסף אין צומת משותף.

תשובה (יש להקיף בעיגול): $\mathcal{P} / \mathcal{NPC}$

הוכחה:

חלק II

1. נתונים וקבועים מראש אוטומט סופי דטרמיניסטי A_0 ומ"ט דטרמיניסטית M_0 . נגדיר את השפות הבאות:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{ \langle M \rangle : M \text{ is a TM and } L(M) = L(A_0) \}, \\ L_2 &= \{ \langle A \rangle : A \text{ is a DFA and } L(A) = L(M_0) \}. \end{aligned}$$

איזו מהאפשרויות הבאות מתקיימת?

(א) שתי השפות, L_1 ו- L_2 , כריעות.

(ב) השפה L_1 כריעה אך השפה L_2 אינה כריעה.

(ג) השפה L_2 כריעה אך השפה L_1 אינה כריעה.

(ד) שתי השפות, L_1 ו- L_2 , אינן כריעות.

2. אם $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ נגדיר $L = \{G : G \text{ has a Hamiltonian cycle}\}$ ולעומת זאת אם $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ נגדיר $L = \{G : G \text{ has an isolated vertex}\}$. איזו מהאפשרויות הבאות מתקיימת?

(א) אם $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ אז L היא ב- \mathcal{P} .

(ב) אם $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ אז L אינה ב- \mathcal{P} ואינה \mathcal{NP} -שלמה.

(ג) אם $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ אז L היא \mathcal{NP} -שלמה.

(ד) התשובות א'-ג' לעיל אינן נכונות.

3. נניח ש- $\mathcal{NP} \neq \text{co-}\mathcal{NP}$. תהיינה $L_1 \in \mathcal{NPC}$, $L_2 \in \text{co-}\mathcal{NPC}$. מה ניתן לומר אודות $L_1 \cup L_2$?

(א) תמיד $L_1 \cup L_2 \in \mathcal{P}$.

(ב) תמיד $L_1 \cup L_2 \in \mathcal{NP}$ ולעיתים $L_1 \cup L_2 \notin \mathcal{P}$.

(ג) תמיד $L_1 \cup L_2 \in \mathcal{NP} \cup \text{co-}\mathcal{NP}$.

(ד) תמיד $L_1 \cup L_2 \in \mathcal{EXPTIME}$ ולעיתים $L_1 \cup L_2 \notin \mathcal{NP} \cup \text{co-}\mathcal{NP}$.

תזכורת: $\mathcal{EXPTIME} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \text{DTIME}(2^{n^k})$.

4. מ"ט דטרמיניסטית חד-סרטית M נקראת מכונת Read-only אם אינה כותבת על הסרט, קרי אם

כל כניסה $\delta(q, x) = (q', y, \leftarrow / \rightarrow)$ בפונקצית המעברים δ מקיימת $x = y$.

נגדיר את בעיית העצירה למכונות Read-only בצורה הבאה: $(\langle M \rangle, x) \in H_{TM}^{RO}$ אם M היא מכונת Read-only העוצרת על הקלט x . איזו מהאפשרויות הבאות מתקיימת?

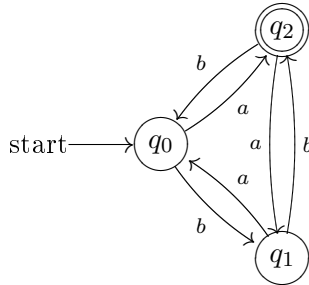
(א) $H_{TM}^{RO} \in \mathcal{R}$.

(ב) $H_{TM}^{RO} \in \mathcal{RE} \setminus \mathcal{R}$.

(ג) $H_{TM}^{RO} \in \text{co-}\mathcal{RE} \setminus \mathcal{R}$.

(ד) $H_{TM}^{RO} \notin \mathcal{RE} \cup \text{co-}\mathcal{RE}$.

5. להלן דיאגרמת מצבים של אוטומט סופי דטרמיניסטי A מעל הא"ב $\Sigma = \{a, b\}$:



מהו מספר מחלקות השקילות של $L(A)^R$? (תזכורת: $L^R = \{x^R : x \in L\}$ כאשר x^R מסמן את המחרוזת x רשומה מהסוף להתחלה)

(א) לא סופי.

(ב) 1.

(ג) 2.

(ד) 3.

6. תהי \mathcal{C}_1 מחלקת השפות שהן גם \mathcal{RE} -שלמות וגם co-RE -שלמות ותהי \mathcal{C}_2 מחלקת השפות שהן גם \mathcal{NP} -שלמות וגם co-NP -שלמות. איזו מהאפשרויות הבאות מתקיימת?

(א) $\mathcal{C}_1 \subsetneq \mathcal{C}_2$ ללא תלות בשאלה $\mathcal{NP} \stackrel{?}{=} \text{co-NP}$.

(ב) $\mathcal{C}_1 \supsetneq \mathcal{C}_2$ ללא תלות בשאלה $\mathcal{NP} \stackrel{?}{=} \text{co-NP}$.

(ג) אם $\mathcal{NP} = \text{co-NP}$ אז $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$.

(ד) אם $\mathcal{NP} \neq \text{co-NP}$ אז $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$.

7. רדוקצית מיפוי משפה A לשפה B נקראת סופר רדוקצית מיפוי אם היא פונקציה חח"ע ועל (כפונקציה $\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$). נניח שקיימת סופר רדוקצית מיפוי מ- A ל- B . איזו מהאפשרויות הבאות אינה מתקיימת?

(א) אם $B \notin \mathcal{RE}$ אז בהכרח $A \notin \mathcal{R}$.

(ב) אם $B \notin \mathcal{R}$ אז בהכרח $A \notin \mathcal{R}$.

(ג) אם $B \in \mathcal{RE}$ אז בהכרח $A \in \mathcal{R}$.

(ד) אם $B \in \mathcal{R}$ אז בהכרח $A \in \mathcal{R}$.

8. נתונה שפה אונרית סופית L וידוע שהמילה הארוכה ביותר בה היא 1^k . תהי $A = L^5$, קרי, L משורשרת חמש פעמים לעצמה. נסמן ב- $n(A)$ את מספר מחלקות השקילות ביחס השקילות \sim_A המוגדר בקבוצה Σ^* ע"י השפה A . איזו מהאפשרויות הבאות מתקיימת?

(א) תמיד $n(A) \leq k + 1$.

(ב) תמיד $n(A) \leq 5k + 1$ ויש שפה L עבורה $n(A) > k + 1$.

(ג) תמיד $n(A) \leq 2^k$ ויש שפה L עבורה $n(A) > 5k + 1$.

(ד) יש שפה L עבורה $n(A) > 2^k$.

מסגרת "חירום" לשאלה פתוחה מספר _____, סעיף _____:

מסגרת "חירום" לשאלה פתוחה מספר _____, סעיף _____: