גרסה 1

מס' ת.ז.: ______________________ **מס' מחברת: _______**

בחינה במודלים חישוביים 2007 סמסטר א' מועד א'

מרצה: פרופ' נחום דרשוביץ
מתרגלת: ריקי רוזן

<u>הוראות</u>

1. **קראו את כל ההוראות והשאלות בתחילת המבחן.**
2. משך הבחינה – 3.5 שעות.
3. ניתן להביא שני דפי עזר למבחן (משני הצדדים).
4. יש לענות על השאלות <u>בטופס השאלון או בטופס התשובות, בהתאם להוראות</u> של כל אחד מחלקי הבחינה. מחברות הבחינה לא ייקראו, וישמשו כטיוטה בלבד.
5. יש למלא בכל דף של השאלון מספר ת.ז. ומספר מחברת.
6. יש למלא בטופס התשובות שם, מספר ת.ז. וגרסה.
7. בבחינה שני חלקים. חלק א' מכיל שאלות סגורות. חלק ב' מכיל שאלות פתוחות. קראו בעיון את ההוראות לכל אחד מהחלקים.
8. הוראות לחלק א':
   א. בחלק זה 10 שאלות מסוג בחירת תשובה מתוך מספר אפשרויות.
   ב. תשובה נכונה מזכה ב-6 נקודות. תשובה שגויה איננה מזכה בניקוד.
   ג. את התשובות יש לסמן במקום המתאים לכך בטופס התשובות.
   ד. בכל שאלה יש לסמן תשובה יחידה.
9. הוראות לחלק ב':
   א. בחלק זה 2 שאלות פתוחות.
   ב. הניקוד לכל שאלה הוא 20 נקודות.
   ג. יש לענות על השאלות במקום המיועד לכך בטופס השאלון.

בכל השאלות, למעט אלא שמסומנות ב-(*) יש להניח ש- $P \neq NP$ וגם $NP \neq Co\text{-}NP$

בהצלחה

גרסה 1

מס' ת.ז.: ____________________ מס' מחברת: _______

חלק א

1.מה מספר המצבים המינימאלי באוטומט DFA שמקבל את השפה L, כאשר
$L=\{w|w\in\{a,b\}^* \wedge$ w does not contain the substring aaa or bbb$\}$
(כלומר שפת המילים מעל a,b אשר לא מכילות את תת המחרוזת aaa ולא את bbb.)

א. 5
ב. 6
ג. 7
ד. 64

2. (*) אם NP=P אז
א. כל בעיה ב P שלמה ב NP
ב. כל בעיה ב P שאינה ϕ או Σ^* שלמה ב NP
ג. כל שפות הרגולריות אינן שלמות ב NP
ד. כל השפות חסרות ההקשר שלמות ב NP

3. אם $L_1 \leq_p L_2$ אזי בהכרח:

א. אם $L_2\in NPC$ אז $L_1\in NPC$
ב. אם $L_1^C\in coNPC$ אזי $L_2^C\in coNPC$
ג. א ו- ב
ד. אף תשובה אינה נכונה.

הסבר: א' בודאי לא נכון שכן L יכולה להיות ב P וב' לא נכון למשל עבורL_2=Halt.

4. תהי L השפה: $L= \{\langle M\rangle|\ L(M)\in P\}$ מה מהבאים מתקיים:

א. $L\leq_m Halt$
ב. $L\leq_m Halt^C$ (כאשר $Halt^C$ היא השפה המשלימה של Halt)
ג. $Halt \leq_m L$
ד. יש יותר מתשובה אחת נכונה.

הסבר: א' ו-ב' לא נכונים שכן $L\notin RE\cup coRE$ (א' גורר ש $L\in RE$ ו ב' ש $L\in coRE$). נראה שקיימת רדוקציה מ Halt ל- L. ראשית ידוע שקיימת שפה $L_e\in EXP\backslash P$ ולכן קיימת מכונה M_e שמכריעה את L_e. בהינתן M,x נבנה את M' כך ש-M' ראשית מריצה את $M_e(w)$ כאשר w הוא הקלט של M' ומקבלת אם M_e קיבלה.אם M_e לא קיבלה אז מריצה את M על x ומקבלת את w אם M עצרה. נשים לב שאם M עוצרת על x אז השפה שנקבלת היא Σ^*,אחרת השפה שנקבלת היא L_e.

5. נגדיר את השפה L באופן הבא:
L= {<M>| M מ"ט פולינומיאלית }
מה מהבאים מתקיים?

א. L אינה כריעה לפי משפט רייס.
ב. $L\notin RE\cup coRE$.

ג. L אינה כריעה והמשלימה שלה כריעה חלקית.
ד. יש יותר מתשובה אחת נכונה או אף תשובה אינה נכונה.

הסבר: א' לא נכון שכן זו אינה תכונה סמנטית יתכנו שתי מכונות שונות שמקבלות את אותה השפה, אך אחת פולינומיאלית והשנייה לא. $L\notin RE\cup coRE$ ע"י רדוקציה מ Halt ל- L ומ $Halt^C$ ל L. רדוקציה מ Halt ל- L: בהינתן M,x קלט ל HALT נבנה את M' כך ש M' מריצה את M על x ומקבלת את w (הקלט שלה) אם M עצרה. נשים לב שאם M עוצרת על x אז M' היא מכונה פולינומיאלית, שכן היא רצה בזמן שאינו תלוי בקלט שלה (w). אם M לא עוצרת על x אז M' לא עוצרת לכל קלט ולכן בפרט אינה פולינומיאלית.

6. נגדיר את השפה K-SAT להיות שפה של נוסחאות φ בצורת CNF כך ש $\varphi=\varphi_1\wedge\varphi_2\wedge\ldots\wedge\varphi_k$ כאשר כל φ_i היא נוסחה בצורת CNF מעל $\log n$ משתנים ייחודיים לה. (סה"כ משתני φ הם איחוד זר של כל המשתנים שבכל φ_i). המחלקה הקטנה ביותר ביחס להכלה שאליה שייכת K-SAT היא:

א. P
ב. NP
ג. NPC
ד. R

הסבר: לכל φ_i פשוט נעבור על כל ההשמות האפשריות למשתנים שלה ונבדוק אם אחת מהן מספקת אותה. סה"כ יש $2^{\log n}=n$ השמות אפשריות לכל φ_i ולכן פולינומיאלית.

7. תהי P פעולה על שפות אזי:

א. אם השפות הרגולריות סגורות תחת P אז גם שפות חסרות הקשר סגורות תחת P.
ב. אם שפות חסרות הקשר סגורות תחת P אז גם השפות הרגולריות סגורות תחת P.
ג. א' ו ב' נכונות.
ד. אף תשובה אינה נכונה.

הסבר: א' לא נכון למשל Half סגורה תחת הרגולריות ולא תחת ח"ה. ב' לא נכון שכן הפעולה יכולה להיות איחוד עם שפה ח"ה שאינה רגולרית.

8. נזכר בבעיית Vertex Cover:

$$VC=\{ (G=(V,E) , k) \mid \exists\, S\subseteq V, |S|\le k \text{ and } \forall(u,v)\in E, u\in S \text{ or } v\in S\}$$

נגדיר את הבעיה הבאה:

MINVC={(G,k)| G is a graph whose smallest vertex cover is of size <u>exactly</u> k}

כלומר G הוא גרף שכיסוי הצמתים המינימאלי הוא בדיוק בגודל k.

מהי המחלקה הקטנה ביותר ביחס להכלה שאליה שייכת MINVC?

א. NP
ב. NPC
ג. coNPC
ד. NP-HARD

הסבר: ראינו בשיעורי הבית – תרגיל 5 שהשפה MAXCLIQUE קשה ל NP ושאינה שייכת ל NP (תחת ההנחה ש $coNP\neq NP$, כיוון שקיימת רדוקציה $MAXCLIQUE\le_p MAXIS\le_p MINVC$ (ודאו שאתם מבינים למה) אזי MINVC קשה ל NP. אם היא הייתה שלמה ב NP – כלומר גם שייכת ל NP, אז גם MAXCLIQUE היתה שייכת ל NP.

9. נגדיר את השפה הבאה:
A} הוא אוטומט DFA שמקבל שפה אינסופית כלומר $|L(A)|=\infty$ |L={A. מהי המחלקה הקטנה ביותר ביחס להכלה שאליה שייכת L?

א. R
ב. RE
ג. $RE \cup coRE$
ד. אף תשובה אינה נכונה.

10. השפה $\{ a^i b^j c^k \mid i,j,k \geq 0,\ k = \min(i,j) \}$ הינה:

א. רגולרית
ב. חסרת הקשר
ג. א+ב
ד. אף תשובה אינה נכונה

גרסה 1

מס' ת.ז.: ____________________ **מס' מחברת:** _______

<u>חלק ב</u>

1. נתבונן בשפה הבאה:

3-SAT-C={φ | φ is a 3-CNF formula and each variable appears **exactly C** times in φ and φ is satisfied }

כלומר כל משתנה מופיע בדיוק C פעמים בנוסחה (הופעה של משתנה x היא x או שלילתו $\neg x$).

ידוע כי 3-SAT-7 (כלומר נוסחת 3CNF כאשר כל משתנה מופיע בדיוק 7 פעמים) שלמה ב NP. הראו כי קיים קבוע D>0 שעבורו הבעיה הבאה <u>שלמה ב- NP</u>:

D-IS={(G,k) | יש קבוצה בלתי תלויה (IS) בגודל $\le k$ ודרגת כל קודקוד ב G היא $\le D$}

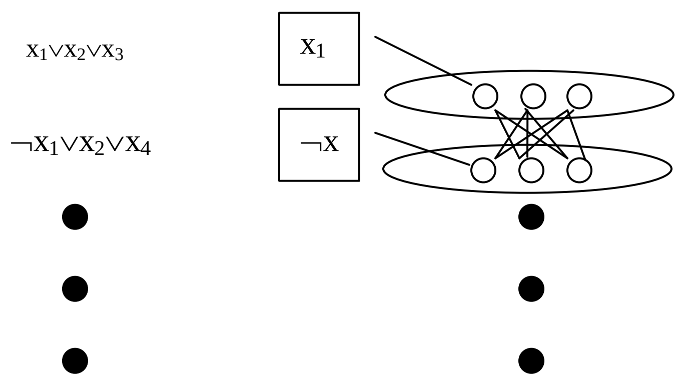
רמז: העזר ברדוקציה ל Clique שנלמדה בכיתה.

הבעיה ב NP – קל לוודא שאכן דרגת כל קודקוד היא לכל היותר D=8 ובהינתן קבוצת קודקודים בגודל לפחות k ניתן לבדוק אם היא ב"ת.

נראה קושי ל NP ע"י רדוקציה $3\text{-SAT-}7\le_p 8\text{-IS}$. למעשה נחלק את הרדוקציה לשני חלקים:

1. $3\text{-SAT-}7\le_p(n-8)\text{-Clique}$ כאשר
(n-8) -Clique={(G,k) | יש קליקה בגודל $\le k$ ודרגת כל קודקוד ב G היא $> n-8$} כאשר n הוא מספר הקודקודים ב G.
2. $(n-8)\text{-Clique}\le_p 8\text{-IS}$

1. $3\text{-SAT-}7\le_p(n-8)\text{-Clique}$: הרדוקציה זהה לזו שראינו בכיתה ($3SAT\le_p$ Clique). הרדוקציה הופכת כל הסגר לשלושה קודקודים ב"ת (אין קשת בין כל אחד מהקודקודים) וקיימת קשת בין שני קודקודים x,y שמקורם בהסגרים שונים אסם $y\neq\neg x$.



נשים לב שאם כל משתנה מופיע בדיוק 7 פעמים אזי לכל קודקוד יהיו יותר מ n-8 שכנים שכן 2 הקודקודים שהם מאותו הסגר הם ב"ת – למשל בדוגמא ל x_1 לא נחבר את הקודקוד x_2 ולא את x_3. וכיוון שכל משתנה מופיע בדיוק 7 פעמים אזי יהיו לכל היותר 6 קודקודים סותרים ($y=\neg x$) שלא תהיה אליהם קשת. הנכונות נובעת מהרדוקציה שהראנו בכיתה.

2. . $(n-8)\text{-Clique}\le_p 8\text{-IS}$ ניקח את הגרף המשלים (הוכח בכיתה). כיוון שדרגת כל קודקוד בגרף המקורי היא $> n-8$ אזי דרגתו ב גרף המשלים היא לכל היותר 8.

*הערה: קל לבדוק אם בהינתן נוסחה כל משתנה מופיע 7 פעמים ואם לא הרדוקציה תייצר גרף למשל משולש ותדרוש k=4. (לא הורדו נקודות למי שלא התייחס לנקודה זו).

2. נגדיר את הבעיה הבאה: $L=\{<M_1,M_2>| \ |L(M_1)\cap L(M_2)|=1\}$
הוכח כי $L\notin RE\cup coRE$

<u>הוכחה:</u>
נראה:
1. $HALT\leq_m L$ לכן $L\notin coRE$
2. $H_{TM}^{\varepsilon}\leq_m L^C$ לכן $L\notin RE$ ($L^C\notin coRE$)

עבור 1: בהינתן M ו-x נבנה M_1 מ״ט שלכל קלט מריצה את M על x ואם M עוצרת אז M_1 מקבלת את הקלט שלה. נבנה מכונה M_2 שמקבלת רק את המילה ε, כלומר $L(M_2)=\{\varepsilon\}$. ברור שהרדוקציה חשיבה. אם M עוצרת על x אז $L(M_1)=\Sigma^*$ ולכן $<M_1,M_2>\in L$. אם M לא עוצרת על x אז $L(M_1)=\phi$ ולכן $<M_1,M_2>\notin L$.

עבור 2: בהינתן M, נבנה את M_1 כאשר M_1 מקבלת קלט w ובודקת אם $w=\varepsilon$ או $w=1$. אם לא, היא דוחה את הקלט. אם $w=1$ היא מקבלת ואם $w=\varepsilon$ היא מריצה את M על ε ומקבלת אם M עוצרת.
נבנה מכונה M_2 שמקבלת רק את המילים ε ,1, כלומר $L(M_2)=\{\varepsilon, 1\}$. ברור שהרדוקציה חשיבה.
אם M עוצרת על ε אז $L(M_1)=\{\varepsilon,1\}$ ולכן $<M_1,M_2>\in L^C$. אם M לא עוצרת על ε אז $L(M_1)=\{1\}$ ולכן $<M_1,M_2>\notin L^C$.