

מבחן מועד א' במודלים חישוביים, סמסטר ב' 2008

בית הספר למדעי המחשב, אוניברסיטת תל-אביב

מרצים: דר' מירי פרייזלר, ריקי רוזן
מתרגלים: יהונתן ברנט, ריקי רוזן

11/08/08

הוראות

1. מומלץ לקרוא את כל ההנחיות והשאלות בתחילת המבחן, לפני תחילת כתיבת התשובות.
2. משך הבחינה – **שלוש שעות**. חומר עזר מותר: שני דפי פוליו (דו צדדיים) בלבד.
3. יש לענות על השאלות הפתוחות במקום המיועד לכך בטופס השאלון (טופס זה) ועל השאלות הסגורות בטופס התשובות.
מחברות הבחינה לא ייקראו, וישמשו כטיוטה בלבד.
4. יש למלא בכל דף של השאלון מספר ת.ז. ומספר מחברת.
5. יש למלא בטופס התשובות שם, ומספר ת.ז.
6. במבחן 2 שאלות "פתוחות" ו-13 שאלות "סגורות".
א. בנוגע לשאלות הפתוחות:
 - הניקוד לכל סעיף מופיע בתחילת הסעיף.
 - יש לענות על השאלות במקום המיועד לכך בטופס השאלון.
 - יש לענות תשובות ברורות ותמציתיות. תשובות מסורבלות יגררו הורדת נקודות.
 - לכל סעיף התשובה "**אינני יודע/ת**" מזכה ב-20% ממשקל הסעיף. במקרה זה **אין להוסיף שום הסבר**, אינטואיציה ושאר הגיגים למיניהם.
- ב. בנוגע לשאלות הסגורות:
 - לכל שאלה יש לסמן תשובה אחת בדף התשובות המצורף.
 - יש לזכור למלא שם, ת.ז. ומספר גרסה בדף התשובות המצורף.
 - הניקוד לשאלות נכון/לא נכון הוא 2 נקודות ולכל יתר השאלות 5 נקודות.
7. יש לדאוג שהבודקים יוכלו לקרוא את התשובות ללא שימוש במיקרוסקופ.
8. כל המספרים המופיעים בהגדרות הם מספרים שלמים, אי שליליים, ונתונים בייצוג בינארי, אלא אם כן נאמר במפורש אחרת.
9. בשאלות בהן יש לתאר מכונת טיורינג, ניתן להסתפק ב**תיאור מילולי משכנע** של אופן פעולת המכונה, ואין צורך להגדיר את פונקציית המעברים שלה, אלא אם הדבר התבקש במפורש.
10. מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בכיתה (בהרצאה, בתרגול, או בתרגיל בית) בתנאי שמצטטים אותה באופן מדויק. טענות אחרות (כאלה שהוכחו בספר, בהרצאות מסמסטרים קודמים באוניברסיטת תל אביב, בבחינות בטכניון מ-1989 וכו') יש להוכיח.
11. בכל השאלות הניחו כי: $NP \neq P$ ו- $NP \neq coNP$, למעט אם נאמר אחרת.

בהצלחה!

לשימוש משרדי	
בלבד	
1	א
1	ב
2	

חלק א'

שאלה 1 (25 נקודות)

הגדרה: L קשה ל-RE אם לכל $L' \in RE$ מתקיים $L' \leq_m L$

א. הוכח או הפרך: אם $L = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \in C \}$ ו- RE , $C \neq \emptyset$ וכן $\emptyset \neq C$ אז L קשה ל-RE (15 נק')

בנייה והוכחה:

ראינו ש H_{TM} היא שלמה ב-RE ולכן בפרט קשה ל-RE. בהוכחה של משפט רייס ראינו שקיימת רדוקציה מ- H_{TM} ל- L ולכן L שמקיימת תנאי זה קשה ל-RE

ב. הוכח או הפרך: אם $L = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \in C \}$ ו- $RE \neq \emptyset, C$ אז $L \in NP\text{-Hard}$ (10 נק')

בנייה והוכחה:

נראה ע"י רדוקציה מ SAT:

$RE \neq \emptyset, C$ ולכן קיימת $M_1 \in L$ ו- $M_2 \notin L$.

בהינתן ϕ נוסחת CNF קלט ל SAT הרדוקציה תבנה מ"ט M כך ש:
M: קלט: x

בדוק אם ϕ ספיקה (ע"י בדיקת כל ההשמות האפשריות)
אם כן הרץ את M_1 על x
אחרת הרץ M_2 על x

נשים לב שהרדוקציה פולינומיאלית (רק כותבים קוד של מ"ט שבודקת אם נוסחה ספיקה)
וקוד של מ"ט M_1 ו- M_2 .

נכונות: אם $\phi \in SAT$ אז $L(M) = L(M_1)$ ולכן $M \in L$
אם $\phi \notin SAT$ אז $L(M) = L(M_2)$ ולכן $M \notin L$

מס' מחברת: _____

מס' ת.ז.: _____

שאלה 2 (25 נקודות)

נתבונן בשפה הבאה:

 $Wasteful-VC = \{ \langle G, k \rangle \mid G = (V, E) \}$ }ב-G יש $VC, s \subseteq V, \text{ בגודל } k \leq |S| \text{ וכן לכל } s' \subseteq V, VC \text{ ב-}G \text{ קיימת קשת } (u, v) \in E, \text{ כך ש- } u \in s' \text{ וגם } v \in s'$ א. האם השפה $Wasteful-VC$ ב-P או ב-NP-Hard ?**הוכחה:**

שייכות ל NP-Hard:

נשים לב שבמשולש ה- VC המינימאלי הוא בגודל 2 וכן לכל $s' \subseteq V, VC$ במשולש קיימת קשת $(u, v) \in E, \text{ כך ש- } u \in s' \text{ וגם } v \in s'$.לכן בהינתן גרף G ומספר שלם k , הרדוקציה בונה G' שהוא G בתוספת משולש שלא מחובר לקודקודי G ופרמטר $k+2$.

ברור שהרדוקציה פולינומיאלית.

נכונות: אם ב- G יש VC בגודל לכל היותר k אז אותו VC יחד עם שניים מקודקודי המשולש הוא VC בגודל לכל היותר $k+2$ ב- G' . כמו כן כל VC ב- G' חייב לכסות את קשתות המשולש ולכן בהכרח קיימת קשת $(u, v) \in E, \text{ ששני קצותיה ב- } G'$.אם ב- G' יש VC בגודל $k+2$ אז הוא חייב לכסות את קשתות המשולש ולכן בהכרח קיימים שני קודקודים בכיסוי ששייכים למשולש. לכן את יתר קשתות G' (שהן בדיוק כל קשתות G) מכסה כיסוי בגודל לכל היותר k .

מס' מחברת: _____

מס' ת.ז.: _____

חלק ב'

1. מהי המחלקה הקטנה ביותר ביחס להכלה אליה שייכת השפה:
 $L = \{ \langle M, w \rangle \mid \text{פעם אף שמאלה } w \text{ לא זזה} \}$
- א. P
 ב. EXP
 ג. R
 ד. RE
2. תהי $L \subseteq \{0,1\}^*$ שפה רגולרית נתבונן בשפה $A = \{ wd^{w|d} \mid w \in L \}$ (כך ש d לא שייך לא"ב). מהי המחלקה הקטנה ביותר ביחס להכלה אליה שייכת:
- א. מחלקת השפות הרגולריות
 ב. מחלקת השפות חסרות ההקשר
 ג. P
 ד. NP
3. אם $L \in \text{NP-Hard}$ וגם $L \in \text{coNP-Hard}$ אז בהכרח
- א. $\text{NP} = \text{coNP}$
 ב. $L \notin \text{R}$
 ג. $L \in \text{RE}$
 ד. אף תשובה אינה נכונה.
4. נתבונן בשפה $\{ \text{לכל קלט } x, M \text{ לא עוברת את התא ה-} \lfloor \frac{|x|+1}{2} \rfloor \text{ בסרט בריצתה על } x \}$
 $L = \{ \langle M \rangle \mid \dots \}$
- מהי המחלקה הקטנה ביותר ביחס להכלה בה נמצאת L?
- א. מחלקת השפות שניתנות להכרעה בזמן קבוע
 ב. P
 ג. R
 ד. RE
5. מהי המחלקה הקטנה ביותר ביחס להכלה שאליה L שייכת כאשר:
 $L = \{ \langle G \rangle \mid L(G) = \{1,2,3,\dots,1000\} \}$
- א. R
 ב. RE
 ג. coRE
 ד. אם $P \neq \text{NP}$ אז L לא כריעה ואם $P = \text{NP}$ אז השפה המשלימה L^c אינה כריעה (בשאלה זו לא ניתן להניח כי $P \neq \text{NP}$)
6. תהי סדרה של שפות $L_1 \dots L_n$ כך שמתקיים: $L_1 \leq_p L_2 \leq_p \dots \leq_p L_n$ אזי בהכרח:
- א. לכל $n, L_1 \leq_p L_n$
 ב. יש קבוע c שעבורו $L_1 \leq_p L_c$ ויש n שעבורו לא מתקיים $L_1 \leq_p L_n$
 ג. קיים n ושפות $L_1 \dots L_n$ שעבורן לא מתקיים $L_1 \leq_p L_n$
 ד. אם $L_1 \in P$ אז $L_n \in P$

מס' מחברת: _____

מס' ת.ז.: _____

7. בהינתן מערכת מתמטית לא מנוונת כפי שהוגדרה בכיתה, נתבונן בשפה $\{ \text{יש ל } S \text{ הוכחה או יש ל } \neg S \text{ הוכחה בפורמליזציה של המערכת של } \}$ Provable = המחלקה הקטנה ביותר ביחס להכלה אליה Provable שייכת היא:

א. NP

ב. R

ג. RE

ד. לא ב RE ולא ב coRE

8. תהי $\{ A \text{ הוא DFA ו } N \text{ הוא NFA כך ש } w \in L(A) \text{ וגם } w \in L(N) \mid \langle N, A, w \rangle\}$ המחלקה הקטנה ביותר ביחס להכלה אליה L שייכת היא:

א. P

ב. NP

ג. EXP

ד. R

בשאלות 9-11 ענה נכון\ לא נכון על כל אחת מהשאלות. כל תשובה נכונה מזכה ב 2 נקודות:

9. במשפט cook-Levin פונקצית הרדוקציה היא חז"ע

א. נכון

ב. לא נכון

10. מתקיים בהכרח: $\text{Factoring} \leq_p \text{IS}$

א. נכון

ב. לא נכון

11. מתקיים בהכרח: $\text{HAMPATH} \leq_p \text{Factoring}$

א. נכון

ב. לא נכון

בשאלות 12-13 נתבונן בבעיה הבאה: אם $A \leq_p B$ ו- B רגולרית אזי בהכרח: (כל תשובה נכונה מזכה ב 2 נקודות)

12. A רגולרית

א. נכון

ב. לא נכון

13. A ח"ה

א. נכון

ב. לא נכון